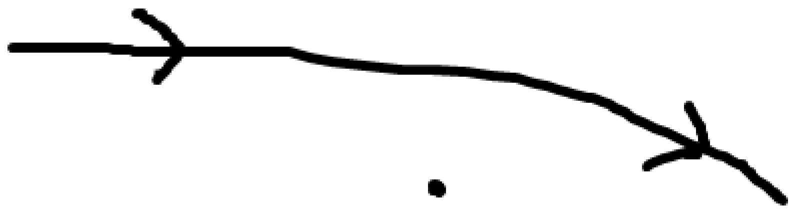
Ситуация:

Летит поток частиц на потенциальный центр. Что нам в задаче дано? Конечно, нам дан вид потенциальной энергии U(ρ).
Масса частиц нам тоже должна быть известна – m.
Также нам нужны начальные скоростные параметры частиц – насколько быстро они летят. Нам нужна или начальная скорость $v_{\text{на бесконечности}}$, или эх энергия E. Они связаны между собой очень простым соотношением $mv_{\text{на бесконечности}}^2/2 = E$, так что если мы знаем одно, то можем очень легко найти другое. Обычно дают энергию E.

Встреча с потенциальным центром может закончиться или рассеянием (частица пролетит, отклонившись на некий угол θ), или падением на центр. Вторая ситуация проще, начнём с ней.

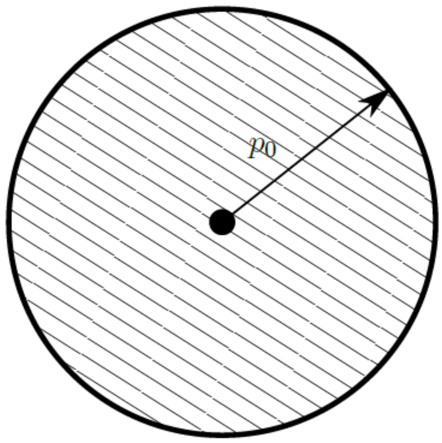
Сечение падения на центр – что это такое?

Если прицельный параметр слишком большой, частица на него НЕ упадёт:



Если прицельный параметр слишком маленький, частица на него упадёт:

Существует некое критическое значение прицельного параметра (Степаньянц его обозначает как p_0).

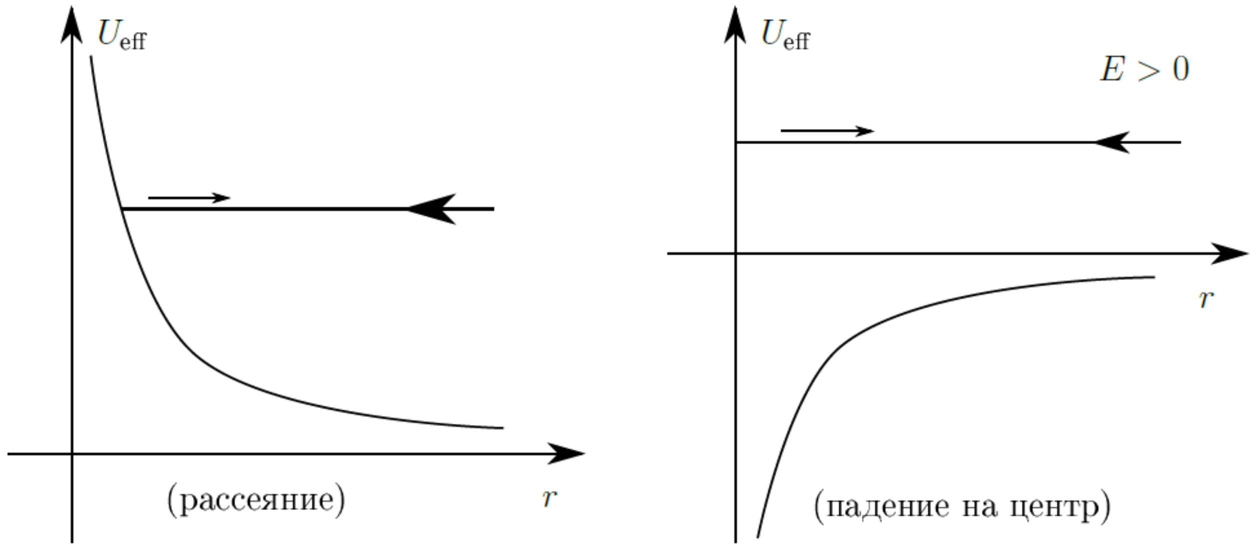


Если частица летит в заштрихованной области, чёрная дыра её засосёт. Иначе – пролетит мимо ☺
Площадь этого круга и есть сечение падения на центр. Сечение имеет размерность площади, как и положено.

Как вы видите, определение сечения падения на центр очень простое. Есть очень плохое определение сечения (любого): это отношение числа частиц за единицу времени, dN/dt. Забудьте ☺ Оно пришло из ядерной физики, экспериментаторам оно удобнее, а вот в физике удобнее то, которое я озвучил выше.

Как решать задачу на падение на центр?

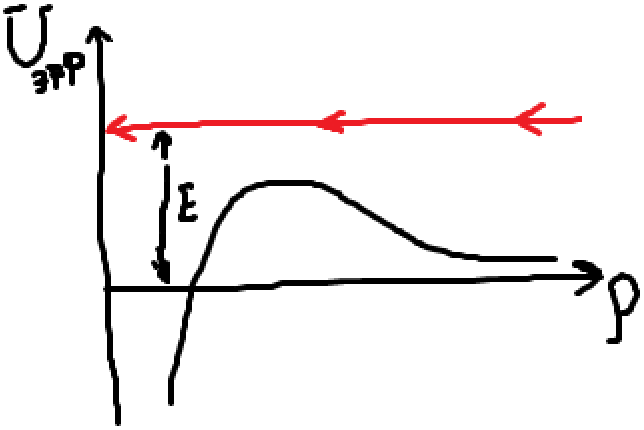
Конечно, второй закон Ньютона решит эту задачу, получим сложную систему дифуров. Можно и Лагранжевым формализмом. Можно и Гамильтоновым. Но это всё будет очень сложно. Наиболее быстро мы придём к ответу, если воспользуемся готовой теорией о движении в потенциальном поле, в частности – эффективной потенциальной энергией. Напомню, почему понятие эффективной потенциальной энергии так удобно: мы вправе пользоваться формулами для одномерного случая и вообще решать задачу, как будто у нас не U(x), а U(r). Но для этого надо заменить U(r) на $U_{эфф}(r)$. Как только мы это сделали, мы вправе рисовать картинки



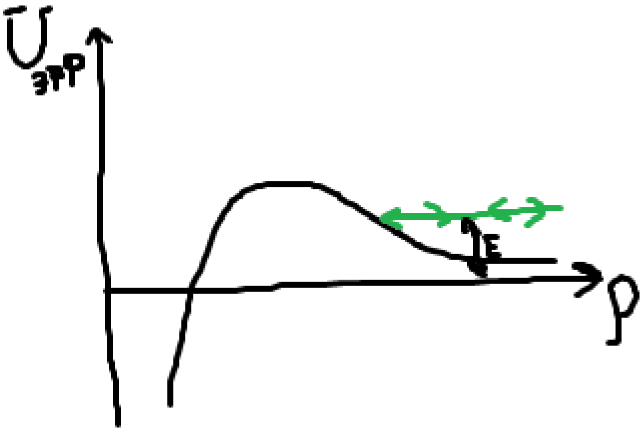
Частица летит на из бесконечности (изображаем луч справа налево, на высоте E). Если мы его можем довести до оси ординат, соответствующей ρ=0, то произойдёт падение на центр. Если нет – то он наткнётся на преграду и «отразится»; после отражения ρ начнёт вновь увеличиваться, что будет соответствовать рассеянию.

Типичный эффективный потенциал для задачи падения на центр имеет вид потенциального барьера:

Если энергия E достаточно велика, частица его преодолеет и упадёт в центр:



А если мала, то отразится:



Таким образом, условие падения на центр равносильно E >= максимума $U_{эфф}(\rho)$. Мы свели исходную задачу к задаче поиска максимума функции.

Отметим, что формула для $U_{эфф}(\rho)$ содержит в себе прицельное расстояние: она содержит обобщённый импульс p_φ (он же момент импульса, поэтому я его также буду обозначать буквой L), который связан с прицельным параметром соотношением $p_\varphi = mv_\infty p$ (напомню, p – не импульс, а прицельное расстояние). Чем больше прицельное расстояние, тем больше L и тем выше находится график $U_{эфф}(\rho)$ и тем больше шансов у частицы отразится.

Для L есть альтернативная формула через энергию E $L=\sqrt{2Em}\,\rho$

(получается подстановкой скорости $V_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$), часто она оказывается удобнее.

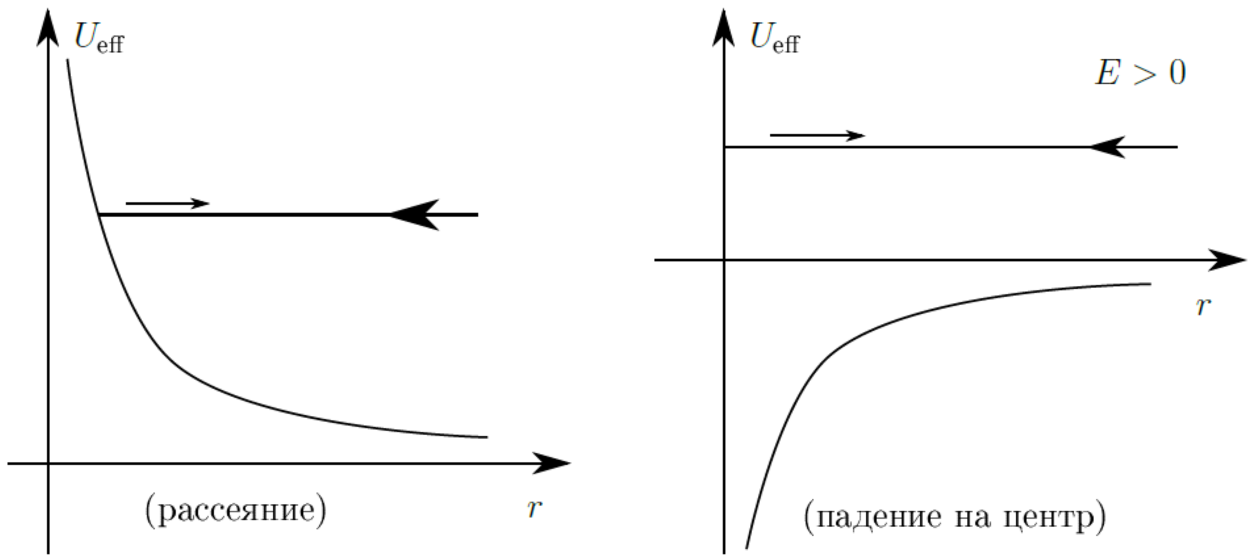
Алгоритм решения задачи на падение на центр в общем случае:
1) Записать эффективную потенциальную энергию с прицельным расстоянием ρ
2) Сообразить, как ведёт себя график $U_{эфф}(\rho)$. Ответить себе на вопрос: при каких значениях E произойдёт падение на центр? Определить возможные значения прицельного расстояния ρ.
3) Зная $\rho_{критич}$, возвести его в квадрат и домножить на π, получив сечение падения на центр.

Примеры.
Потенциальная энергия $U=-\alpha/r^2$.

Сначала рассмотрим простой частный случай, n=2 (его разбирает Степаньянц в самом конце 4 семестра). Тогда

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} = \left(-\alpha + \frac{p_\varphi^2}{2m}\right)\frac{1}{r^2}$$

Т.е. это $1/r^2$, домноженная на некий коэф, который может быть как положительным, так и отрицательным.



Если он положителен, то реализуется первая картинка, где частица рассеивается.
Если он отрицателен, то реализуется правая картинка, где частица падает.
Значит, условие падения на центр равносильно условию отрицательности того коэфа:

Падение на центр будет, если:

$$0 > \frac{p_\varphi^2}{2m} - \alpha = \frac{m^{\cancel{2}} v_\infty^2 p^2}{2\cancel{m}} - \alpha \Rightarrow 0 > Ep^2 - \alpha \Rightarrow \alpha > Ep^2 \Leftrightarrow p^2 < \frac{\alpha}{E} \equiv p_0^2$$

Мы нашли критический прицельный параметр. А сечение – площадь круга с этим радиусом:

$$\sigma_{\text{пад.}} = \pi p_0^2 = \frac{\alpha\pi}{E}$$

Теперь рассмотрим общий случай: потенциал $-\alpha/r^n$.

$$\frac{-\alpha}{r^n} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

Возьмём производную, она будет

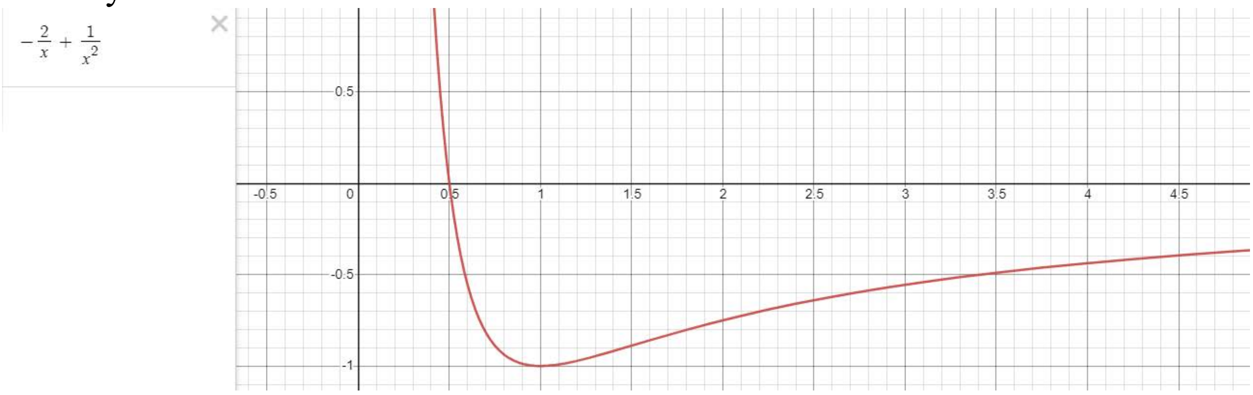
$$\frac{\alpha n}{r^{n+1}} - \frac{p_\varphi^2}{mr^3}$$

Её знак будет определяться соотношением (если домножить на r^3):

$$\alpha n r^{2-n} - L^2/m$$

Исследуем знаки этой функции при r>0. Они будут такие же, как у производной $U_{эфф}(r)$.

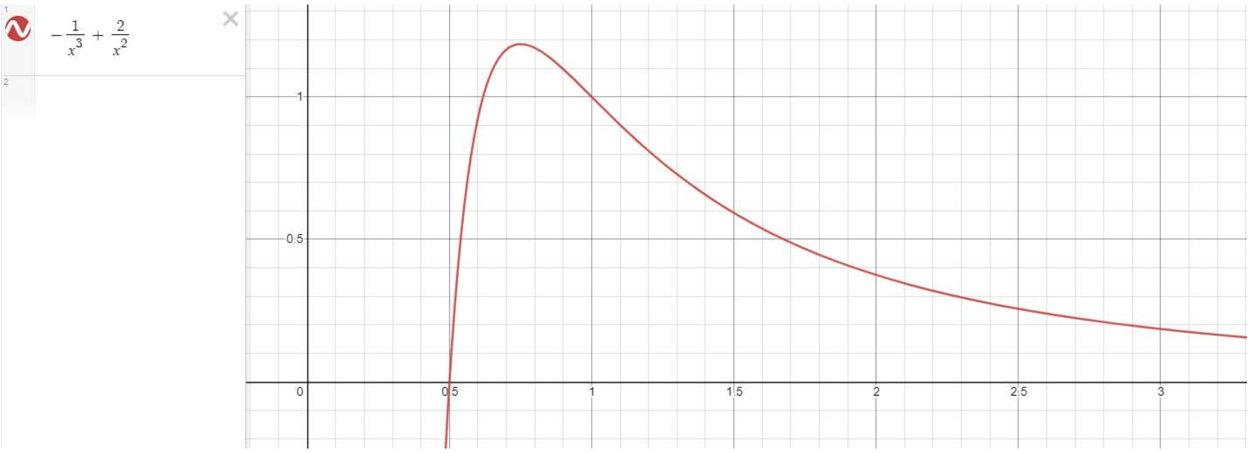
Если n=1, то это линейная функция. Будет один ноль, слева от него она будет отрицательна, справа – положительна. Это значит, что $U_{эфф}$ будет иметь минимум:



В этом случае падения на центр не будет вообще и никогда. Видите вот этот хвост слева, убегающий на плюс бесконечность вдоль оси ординат? От него отразится луч на любой высоте E, как бы высоко он не был.

Случай n=2 уже разобран.

Если n>2, то снова будет один ноль, но на этот раз слева от него производная будет положительна, справа – максимум.



В этом случае падение на частиц будет, если частицы, двигающейся справа, энергия должна быть больше максимального значения этого функции.

Да уж: малоэнергичная частица не упадёт на центр, потому что отразится от потенциального барьера и пролетит мимо. А вот сильноэнергичная частица преодолеет потенциальный барьер, и после чего падения на центр ей будет уже не избежать. Добавка эффективного потенциала $1/r^2$ как бы «предохраняет» частицы от падения на центр, но если будут сильноэнергичны, то упасть они упадут.

Давайте найдём r, соответствующий максимуму. Нуль производной можем найти, решив уравнение

$$\alpha n r^{2-n} - L^2/m = 0$$

$$r^{2-n} = L^2/(\alpha m n)$$

$$r = (L^2/(\alpha m n))^{n-2}$$

Подставляем в потенциальную энергию $\frac{-\alpha}{r^n} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$ и находим её максимальное значение:

$$\frac{-\alpha}{\left(\left(\frac{L^2}{\alpha m n}\right)^{n-2}\right)^n} + \frac{L^2}{2m\left(\left(\frac{L^2}{\alpha m n}\right)^{n-2}\right)^2} = E$$

Это и есть критическая энергия.

Полученное уравнение можно трактовать так: при заданном L левая часть – это минимальная энергия, чтобы частица упала на центр. Или так: при заданной E L – это момент импульса, соответствующий как раз критическому прицельному расстоянию.

В общем случае это уравнение относительно L не решается. Но предположим, что мы его решили, и знаем начальный критический момент импульса L частицы. Собственно, всё. Находим критический прицельный параметр из уравнения $L=\sqrt{2Em}\,p$, возводим его в квадрат, домножаем на π и получаем сечение.

Случай рассеяния.

Наиболее простой вопрос, который можем задать: под каким прицельным параметром р должна лететь частица, чтобы рассеяться на угол θ? Действительно, тем дальше она летит, тем угол рассеяния меньше (потенциальный центр далеко, частице в достаточной степени пофиг).
А если она летит близко, то потенциальный центр её притягивает (или отталкивает) сильно-сильно, и угол θ тогда будет велик. В случае отталкивания при р->0 он вообще стремится к 180 градусам, а в случае притяжения на центр мы ограничены $р_{критич}$ – меньше уже нельзя, произойдёт падения на центр.
Итак, наша цель – найти зависимость конечного угла рассеяния θ от прицельного расстояния р (функцию θ(р)) и прицельного расстояния от конечного угла (функцию р(θ)). В общем – связать θ и р уравнением, где m и E выступают в роли параметров.

Как и в прошлый раз, задачу можно решать Ньютоновым формализмом: записать силу в проекции на какие-то оси и получить систему сложных дифуров. Можно Лагранжевым формализмом, можно Гамильтоновым.

Но зачем, если есть готовые формулы, полученные из темы «движение в центральном поле»?

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}$$

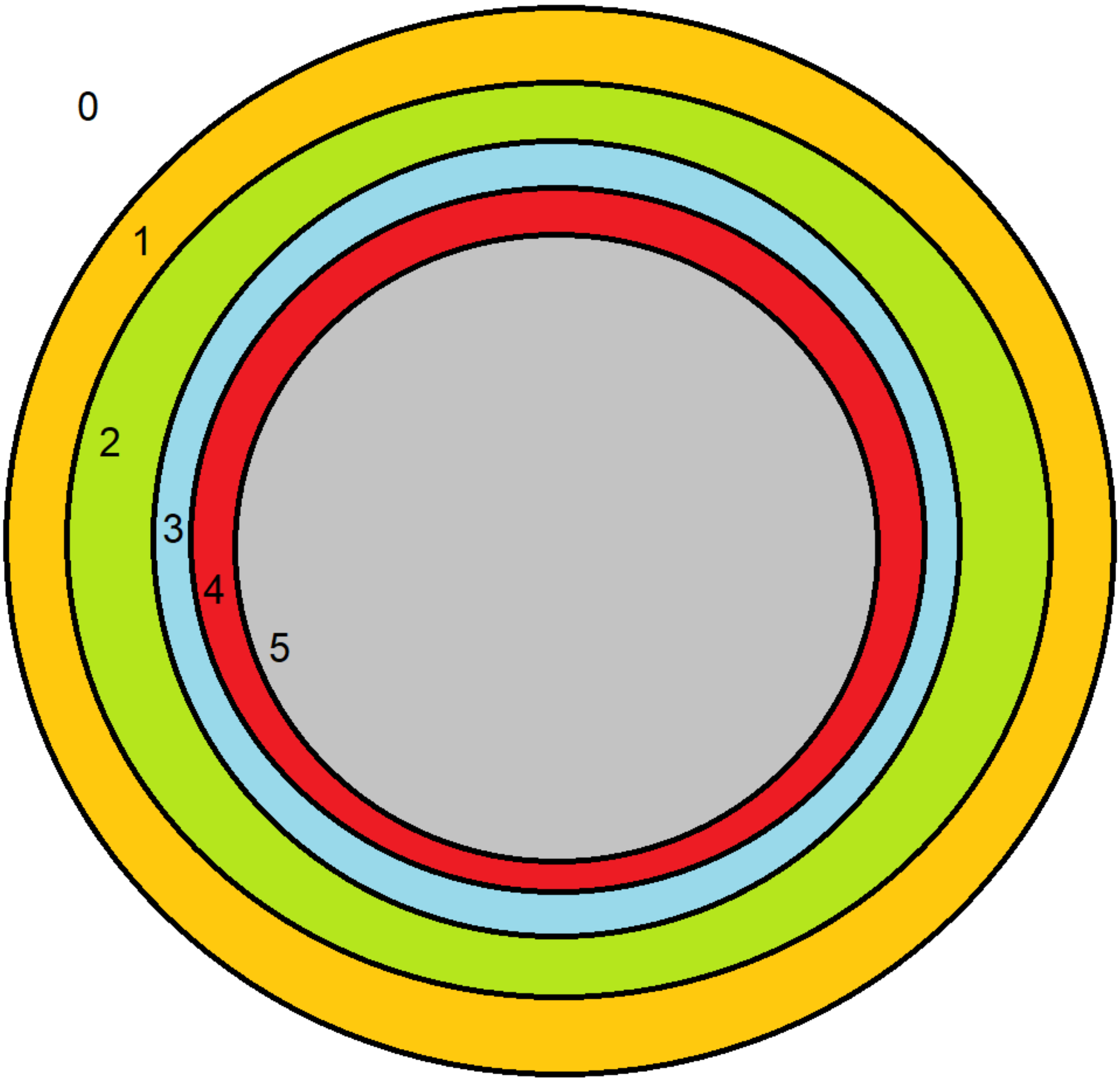
$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}$$

Напомню, как ими пользоваться. Пусть мы знаем, что изначально расстояние ρ от частицы до центра было ρ_0 , а в конец стало ρ (важное замечание – расстояние должно меняться монотонно). Тогда мы можем узнать, сколько прошло времени и на какой угол сместилась частица, подсчитав соответствующие интегралы.
Время нас не интересует, а вот угол интересует. Дело в том, что мы можем разбить движение на два этапа:
1) Из бесконечности (ρ=бесконечности) в точку минимального расстояния до центра ρ_{min}.
2) Из точки минимального расстояния до центра вновь на бесконечность.
И за первый, и за второй случай частица должна повернуться на угол $\theta/2$ (а в сумме как раз будет θ). Т.е. всё, что от нам нужно – приравнять интеграл к $\theta/2$.

Это на самом деле практически победа. Надо ещё как-то подсчитать ρ_{min}. Как вы понимаете, в момент ρ_{min} кинетическая энергия будет ноль, и нам надо всего лишь приравнять потенциальную энергию $U(\rho_{min})$ к начальной энергии E: $U(\rho_{min})=E$. Решение этого уравнения зависит от явного вида потенциальной энергии, и, как правило, проблем не вызывает.

После того, как вы нашли ρ_{min}, у вас в том уравнении осталась неизвестной одна величина - p_φ , она же L. А это, я вам напомню, $L=\sqrt{2Em}\,p$
Таким образом, у нас получилось уравнение, связывающее угол рассеяния θ и прицельное расстояние p – что нам и надо! Да, тот интеграл ещё надо взять, и тут нам необходимо знать точный вид потенциала; интеграл не всегда возьмётся красиво, но подсчитать один интеграл – это значительно проще, чем дифур (или даже система дифуров) – что аналитически, что численно.

Дифференциальное сечение рассеяния.
Теперь, когда мы нашли $\theta(p)$, можно поговорить о том, что такое дифференциальное сечение рассеяние.



Частицы, летящие в белой области, отклонятся менее, чем на 1 градус.
Частицы, летящие в оранжевой области, отклонятся на 1..2 градуса.
Частицы, летящие в зелёной области, отклонятся на 2..3 градуса.
Частицы, летящие в голубой области, отклонятся на 3..4 градуса.
Частицы, летящие в красной области, отклонятся на 4..5 градуса.
И т.д., потом мне стало лень влом рисовать круги ☺

Что такое сечение частиц, отклонившихся на 3..4 градуса? Это площадь голубой области. Мы даже её рассчитать можем: это $\pi(p^2(3 \text{ градусов}) - p^2(4 \text{ градусов}))$ (разность площади двух кругов).

А что насчёт сечения частиц, отклонившись на углы в диапазоне [θ – dθ/2… θ +dθ/2]? Используя приближённые формулы, легко получить

$$d\sigma = \pi \left| \frac{dp^2}{d\theta} \right| d\theta$$

Какой у этой формулы физический смысл? Представим себе детектор в форме круга. Тогда чем больше $\left|\frac{dp^2}{d\theta}\right|$, тем больше будет сечение и тем больше в него будет попадать частиц.

Например, пусть p(θ)=ctg θ. Тогда $\left|\frac{dp^2}{d\theta}\right|$ будет 2 ctg θ / sin ^{2}θ.
Можно убедиться https://www.desmos.com/calculator/4p5iujcnep , что дифференциальное сечение при 60 градусах будет меньше, чем при 45, а при 45 – меньше, чем при 30. Т.е. частиц, отклонённых на 30 градусов, будет больше, чем на 45 или 60.